ホイヘンスの原理に基づく新しい蜃気楼理論

琵琶湖地域環境教育研究会　松井　一幸

ホイヘンスの原理を用いた光の経路計算法に基づき、蜃気楼現象を統一的に説明することを試みた。地球の丸さを考慮し、大気の気温分布(湖面層や境界層)についてはニュートンの冷却の法則を応用して指数関数的振る舞い(exp層)を採用した。

その結果、光の経路計算(ray tracing)が非常に簡単になり、それから生み出される蜃気楼曲線(mirage curve)の概念を用いると蜃気楼に対する定量的な理解が可能になること、蜃気楼曲線を指南書にすると、実景画像から蜃気楼のシミュレーション(mirage simulation)が容易にできることを明らかにした。

1. はじめに

蜃気楼は人間の錯覚で生じるものではなく、純粋に科学的に光の屈折で説明できるものである。蜃気楼は光の経路を明らかにすることにより正しく理解することができる。

ホイヘンスの原理を用いた波動光学的な手法で光の経路を計算し、蜃気楼に応用した手順について述べる。

2. 準備

(1)地球の丸さ

蜃気楼を正確に扱うには、地球の丸さを考慮する必要がある。地球半径をR=6,370kmとし、観測点の湖面から水平方向をx軸、鉛直方向をy軸にとると、湖面の落ち込みは、

$$y = -\alpha x^2$$

で近似できる。ここに$\alpha = 1/(2R)$。

(2)大気の気温分布

ニュートンの冷却の法則を応用し、下位・上位蜃気楼に対する気温分布を次のようにモデル化した。湖面からの高さが同じなら気温は同じとすることで地球の丸さが考慮できている。

○下位蜃気楼

$$ti(x,y) = t3 + (t2-t3) \cdot \exp[-(y+\alpha x^2)/d]$$

ここに、t2:湖面気温、t3:上層気温、d:降下定数

○上位蜃気楼

$$ts(x,y) = \{t1 + t2 \cdot \exp[-(y+\alpha x^2-H)/D]\} / \{1 + \exp[-(y+\alpha x^2-H)/D]\}$$

ここに、t2:下層気温、t1:上層気温、H:境界層の高さ、D:気温跳躍定数

○通常の気温減率

$$tn(x,y) = -(0.6/100)(y+\alpha x^2)$$

◇全てが共存する時

$$t(x,y) = ti(x,y) + ts(x,y) + tn(x,y)$$

(3)大気の屈折率

StoneとZimmermannの文献から以下の式を用いた。

$$n(x,y) = 1 + 0.0789/[273.15 + t(x,y)]$$

3. 光の経路算出(ray tracing)

ホイヘンスの原理を用いると光の経路は隣接する2本の光線の進み方で決めることができる。

蜃気楼は水平方向近くで起きる現象であることを考慮すると、角度$\theta i\text{-}1$で進んできた、高さがΔy異なる2本の光は、屈折率の違いからΔt進む間に到達距離に僅かな差が出る。僅かな差が原因で光の経路は微小角$\Delta\theta i$曲がることになる。速い方の到達距離をΔxとすると、

$$\Delta\theta i = \{1-n(xi,yi+\Delta y)/n(xi,yi)\}\Delta x/\Delta y$$

となる。この変化を繰り返しながら対象物へと進んでいく。屈折率n(x,y)の中に気温t(x,y)が含まれ、光の経路計算は複雑に思えるが、コンピュータを用いると容易に計算が可能である。

i番目の角度、位置は、次のようになる。

$$\theta i = \theta 0 + \Delta\theta 1 + \Delta\theta 2 + \cdots + \Delta\theta i = \theta i\text{-}1 + \Delta\theta i$$

$$xi = \Delta x(\cos\theta 0 + \cos\theta 1 + \cdots + \cos\theta i\text{-}1)$$

$$yi = h + \Delta x(\sin\theta 0 + \sin\theta 1 + \cdots + \sin\theta i\text{-}1)$$

ここに、θ0は初期目線角度、hは観測点の湖面からの高さである。

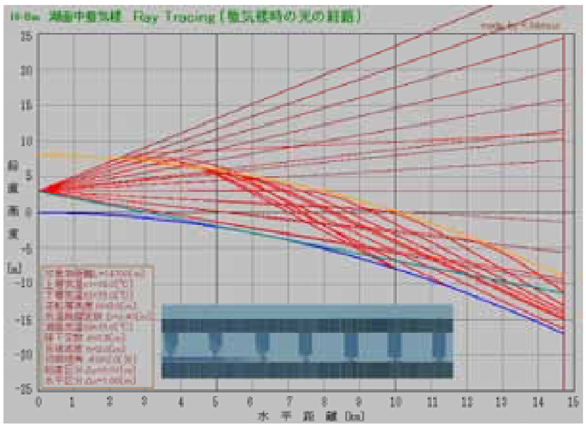

図-1　光の経路(ray tracing)計算の一例
(上位蜃気楼：湖面蜃気楼ステージの例)

4. 蜃気楼曲線(mirage curve)

対象物までの距離をLとすると、xiがLになる

まで加算を行い、その時のyの値をyLとして対象物への到達位置を算出する。

光の経路には可逆性があるので、観測点から対象物に進む光の経路を考えることにより、対象物から観測者への光の経路を算出した。

この計算結果より、θ0(実視角)の方向に見える対象物は、実景の時はθR=(yL-h)/Lに見えると結論できる。これを実景角と呼ぶ。

下位蜃気楼ではパラメータt2,t3,d、上位蜃気楼ではパラメータt1,t2,H,Dをセットして、θ0を-5分から2分程度まで0.05分毎に変化させ、各々に対応するθRを計算で求める。結果を、横軸にθ0(実視角)、縦軸にθR(実景角)でプロットすると曲線が得られる。これを蜃気楼曲線(mirage curve)と呼ぶことにする。

(1)下位蜃気楼における蜃気楼曲線

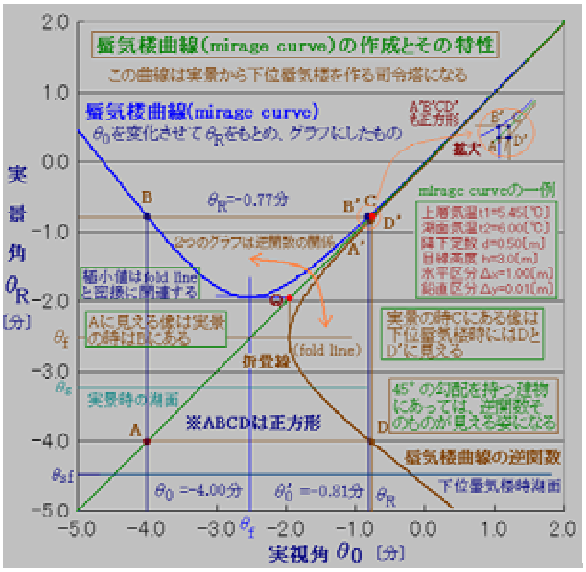

図-2　下位蜃気楼の蜃気楼曲線の例

左上の「下に凸のグラフ」が得られた下位蜃気楼の蜃気楼曲線である。このグラフの逆関数を描くと下位蜃気楼の意味が明らかになる。

傾き45°の勾配を持つ対象物があれば逆関数のような形の下位蜃気楼が見えることになる。折り畳み線(fold line)や下位蜃気楼時の湖面の位置も計算可能になる。また、観測目線高度hを変化させた時の湖面と折り畳み線の間の角度も算出できることになる。

(2)上位蜃気楼の蜃気楼曲線

Z型蜃気楼の例では、左上の逆関数の形がS型になっている。これに呼応して琵琶湖大橋はZ型の姿を見せる。P3のところで曲線が水平に変化するのが、高さが揃うことに呼応する。

蜃気楼曲線の何よりの魅力は、このグラフの情報を用いると、実景から上位・下位蜃気楼がシミュレーションできることである。

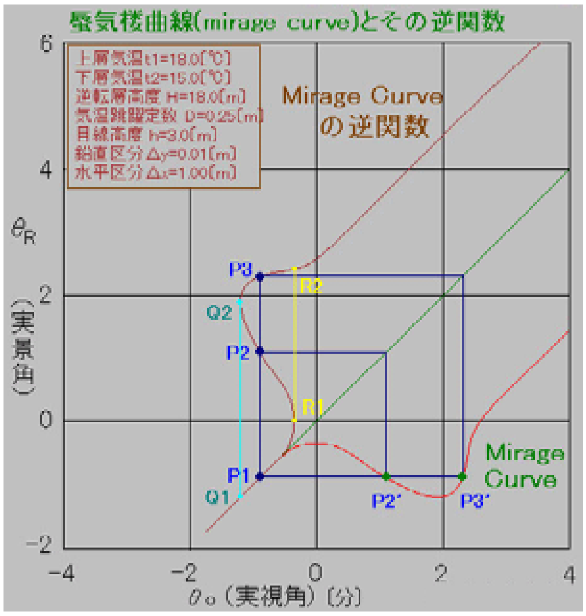

図-3　上位蜃気楼の蜃気楼曲線の例
(上位蜃気楼:Z型蜃気楼の例)

5. 蜃気楼シミュレーション (mirage simulation)

蜃気楼曲線(mirage curve)に基づき、θ0に対応する実景画像の縦1dotの線画像を、θRに対応する位置へ縦1dotだけコピー・ペーストする。この作業は、θ0=-10分から始め、0.05分刻みで+20分まで600回コピー・ペーストの画像処理を繰り返した。

一連の作業を終えると、実景画像は蜃気楼画像に変化した。また、境界層の降下を自動で行いダイナミック・シミュレーション表示も可能にした。今回の計算や画像処理プログラミングは、全てVisual Basic 2008やVisual Studio 2012で行った。

図-4　琵琶湖大橋Z型のシミュレーション

6. 今後の課題と期待

シミュレーション画像は、実際に琵琶湖で観測される蜃気楼の観測画像とよく一致し、物理的意味を明らかにした。ここで示した手法は、下位蜃気楼における湖面層や上位蜃気楼における境界層の生成・運動・消滅の解明に大きな役割を果たしてくれると期待される。