光線の逐次追跡をしない蜃気楼形状の計算

大阪市立科学館、中之島科学研究所

長 谷 川　能 三

概　要

気温分布から蜃気楼形状を計算することは、蜃気楼の研究や普及教育にとって有用である。しかし、連続して変化する屈折率や地球の丸みを考慮するために、光線を逐次追跡しなければならず、計算にある程度時間がかかる。

今回、屈折率が高さの一次関数で変化する場合には、光の経路が放物線で近似できること、また、地球の丸みを屈折率の変化に組み込みことで、蜃気楼の形状を非常に高速で計算することができるようになった。そこで、この光線の逐次追跡をしない計算方法、および、その利点と欠点について述べる。

1. はじめに

光線追跡による蜃気楼の形状計算は、

①観測した気温分布から蜃気楼の形状を計算し、実際に撮影した蜃気楼の写真と比較

②撮影した蜃気楼の写真から、気温分布の予測

③未だ観測されていない蜃気楼の存在予測

④蜃気楼の原理の解説

など、有用である。しかし、

④地球の丸みのため境界面が平面でない

⑤屈折率が連続的に変化する

⑥全反射的に光線の方向が変わる点が存在する

といったことから、その計算は単純ではない。

このため、光の進む経路を逐次計算によって求める光線追跡法が使われる。この方法では、与えられた気温分布から蜃気楼の形状は計算することができるが、解析的な計算でないため、蜃気楼の形状から気温分布を計算することは不可能である。気温分布を予想するには、多くの気温分布のパターンを計算し、その中から撮影した写真に近い形状変化をしているものを選ぶことになる。このため、コンピューターが高性能化したとはいえ、逐次計算による光線追跡の計算では、ある程度時間がかかることがネックとなる。

2. 屈折率が連続的に変化する場合の光の経路

スネルの法則では、平坦面を境界として屈折率が異なる場合について、その角度の関係を示しており、

$$\mathrm{n}_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad \cdots(1)$$

で表わされる。多数の平行な境界面がある場合には、

$$\mathrm{n}_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 = \cdots \qquad \cdots(2)$$

となる。これを、層の数を増やし、各層の厚みを薄くし、層と層の屈折率の差を小さくしていく極限を考えることで、連続的に屈折率が変化する場合には、

$$n_0 \sin\theta_0 = n(h) \sin\theta(h) \qquad \cdots(3)$$

となる。ここで、h は高さで、屈折率 $n(h)$ および光の経路の傾き $\theta(h)$ は、高さの関数となっている。但し、光の経路が高さの多価関数となる場合があり、その場合は $\theta(h)$ も高さの多価関数となる。

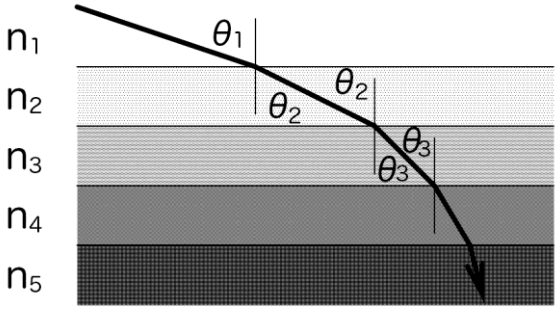

図1. 屈折率の異なる多層体での光の屈折

3. 光の経路が放物線になる条件

ここで、屈折率 $n(h)$ がどのような場合に、光の経路が放物線になるかを考える。

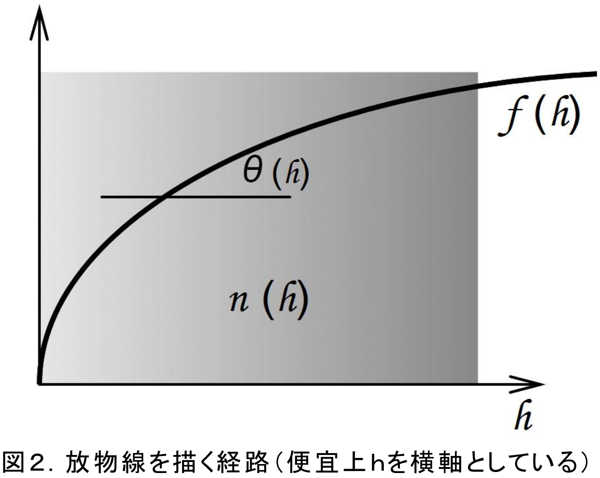

図2. 放物線を描く経路（便宜上hを横軸としている）

そこで、光の経路 $f(h)$ を、

$$f(h) = \sqrt{ah} \qquad \cdots(4)$$

とする。また、連続的に屈折率が変化する場合に拡張したスネルの法則（式3）より、

$$n(0) = n(h)\ \sin\theta(h) \qquad \cdots(5)$$

である。一方、$f(h)$ の傾きは、

$$f'(h) = \tan\theta(h) \qquad \cdots(6)$$

であるから、

$$n(h) = n(0)\sqrt{1 + {}^{4h}/_{a}} \qquad \cdots(7)$$

となる。

式4において、$h \sim 10[\mathrm{m}]$ に対し $f(h) \sim 10[\mathrm{km}]$ を想定していることから、$4h/a \ll 1$ としてよい。このため式7は、十分よい近似で、

$$n(h) = n(0)\left\{1 + {}^{2h}/_{a}\right\} \qquad \cdots(8)$$

となる。逆に、空気の屈折率が高さの一次関数で表わされる場合には、光の経路は放物線を描くと考えてよいこととなる。

3. 地球の丸みの繰り込み

蜃気楼が発生している状況における光線を描く場合、横方向の距離に対して、高さ方向を100倍程度に強調して描くが、このとき描き方には大きく2通りある。ひとつは、地面を上に凸の曲線で描き、気温が一定の範囲では光線は直進する描き方である。もう一方は、地面を直線で描く方法であり、この場合、気温が一定の範囲でも光線は下に凸の曲線（十分よい近似で放物線）で描かれる。

後者の描き方の場合、地面が平らで気温が高さの一次関数で変化している場合と、計算上は全く同じである。つまり、地球の丸みは、気温分布として扱うことが可能であり、さらに実際の気温分布を加えることで、実際の光線の進行を描くことができる。

4. 光線の逐次追跡をしない蜃気楼形状の計算

このようにして、屈折率（気温）が高さの一次関数で表わされることから、空気を3層に分け、低層は気温が一定（冷気層）、高層も気温が一定（暖気層）とし、中層の気温は低層の気温から高層の気温へ一定の勾配で気温が上がるとする。それぞれの層では、この気温紅梅に、地球の丸みを繰り込んだ値を用いる。

また、各層内で光線は放物線を描き、層と層の境界面では傾きが一致するような放物線を選ぶこととする。

今回プログラムには HSP という言語を用いたが、数値計算には特に優れた言語ではない。それでも、図3のように多数（50本）の光線の経路も一瞬で描くことができるようになった。そこで、例えば冷気層と暖気層の気温差を100分割で変化させた場合でも、わずか10秒あまりでその変化を計算し、表示することができた。

5. 考察

今回の光線の逐次追跡を用いない計算方法の圧倒的な利点は,上記のとおり計算の速さである。このため、何か1つのパラメーター（気温差、混合層の厚さ、高さ、観測者の視線の高さなど）を変化させながら蜃気楼の形状がどのように変化していくかといったことを一瞬にして見ることかできるようになった。

しかし、この方法で計算することができるのは、気温分布が高さの一次関数になっている場合のみであるので、例えば観測者からの距離によって冷気層・混合層・暖気層の境界の高さが変化する場合や、それぞれの層の気温が変化する場合には対応できない。また、混合層の気温変化は一次関数として表わすことしかできない。

一方、非常に複雑ではあるが、蜃気楼の変形を解析的に表わすことも可能であることから、今後、撮影された蜃気楼写真から気温分布を推定することに繋がる可能性が考えられる。

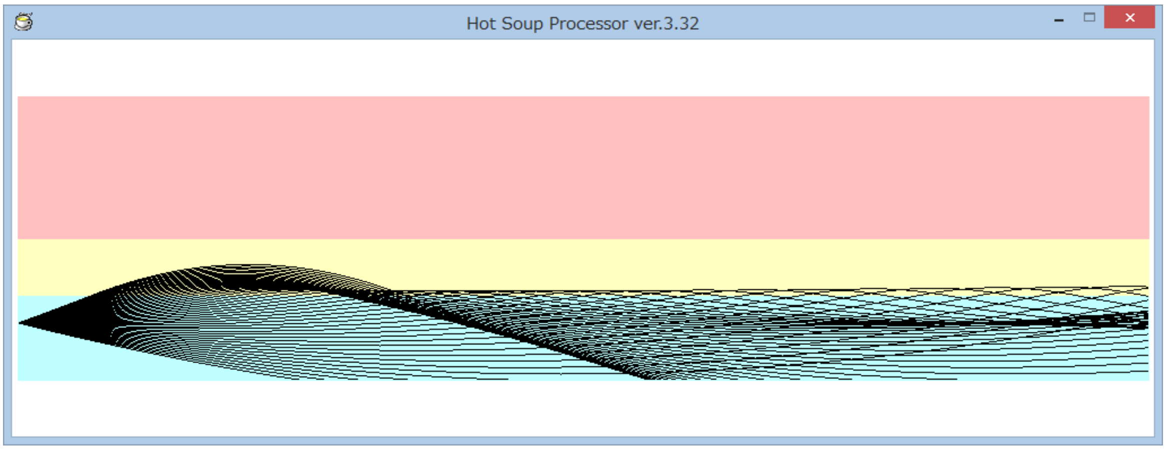

図3. 光線の逐次追跡を用いない蜃気楼形状の計算の様子