

蜃気楼曲線の解剖学 — 上位蜃気楼編 —

森川 浩司

1. はじめに

上位蜃気楼の像が複数見える条件が知りたい！
そのためには松井一幸会員の「蜃気楼曲線」(例えば、松井 2014)がなぜあのような形になるのかわかるといいのではと考えた。そこで図 1 のように状況を単純化して蜃気楼曲線の構造を検討した。

図 1 では水平距離 L 離れた高さ h からの光が目線高さ I に届く。高さ H から $H + W$ までは屈折率は単位長さ当たり $-A$ ($A > 0$) で減少しており、それ以外の高さでは一定とする。蜃気楼が発生していないときの「実景角」 θ_j は $\theta_j = (h - I)/L$ である。これが蜃気楼発生時にどの高さ(「蜃気楼角」 θ)に見えるかを考える。屈折率が高さに比例して変化する状況での光路(世戸・吉田 2019)を、 $\frac{W}{L}, \frac{H}{L} \ll 1$ という現実の一般的な状況から $\theta, \theta_j \ll 1$ として得られる放物線で近似する(その場合 2 次の係数は $-A/2$ となる)。

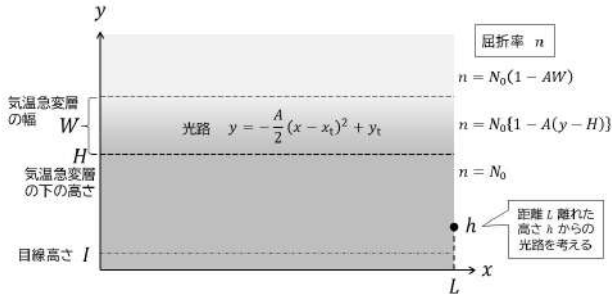


図 1 上位蜃気楼の状況設定

2. 分析結果の例

図 2 に $L = 5\text{km}$, $I = 1\text{m}$, $H = 6\text{m}$, $W = 4\text{m}$, $A = 2 \times 10^{-6}/\text{m}$ (気温差 6°C に相当) の例を示す。以下、領域 A, B, C, D, E に分けて説明する。

2.1 領域 A

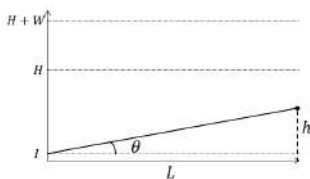


図 3 領域 A の光路

図 3 に領域 A の光路を示す。高さ h から直線状に I に届き、蜃気楼曲線は(直線の) $\theta_j(\theta) = \theta$ である。

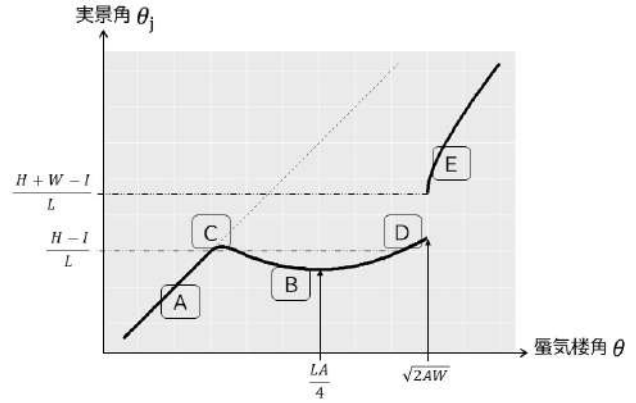


図 2 上位蜃気楼の蜃気楼曲線分析結果の例

2.2 領域 B

図 4 に領域 B の光路を示す。高さ $h \leq H$ からの光が H より上を通って曲がって届く。

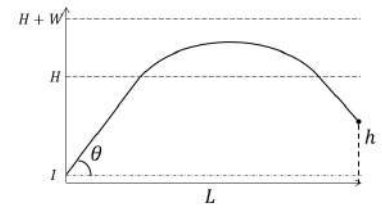


図 4 領域 B の光路

このときの蜃気楼曲線は

$$\theta_j(\theta) = \frac{1}{2\theta_L}(\theta - \theta_L)^2 + 2\theta_H - \frac{1}{2}\theta_L$$

となる(なお $h \leq H$ から $\theta_j \leq \theta_H = (H - I)/L$ としているので $2\theta_H \leq \theta_L$ となる必要がある)。領域 B での蜃気楼曲線は $\theta_L = LA/4$ で”底”となる。

2.3 領域 C または D

図 5 に領域 C または D の光路を示す。高さ $h \geq H$ からの光が曲がって届く。

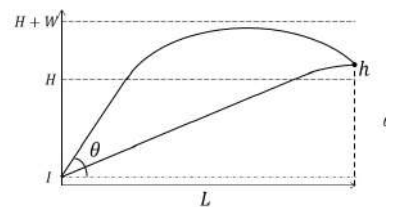


図 5 領域 C または D の光路

このときの蜃気楼曲線は

$$\theta_j(\theta) = -2\theta_L + \theta + \frac{4\theta_L\theta_H}{\theta} - 2\frac{\theta_L\theta_H^2}{\theta^2}$$

となる。 $\theta_H \leq \theta_j$ だが放物線の頂点の高さは $H + W$

以下なので $\theta_j \leq \theta_W = \sqrt{2AW}$ となる。領域 C では $\theta^3 - 4\theta_L\theta_H\theta + 4\theta_L\theta_H^2 = 0$ の 2 つの正の実数解のうちの小さいほう (θ_c とする) のときに”山”となる。なお、3 つの実数解があるのは $27/16\theta_H \leq \theta_L$ のとき。(また、常に存在する実数解は負である。)

2.4 領域 E

図 6 に領域 E の光路を示す。高さ $h \geq H + W$ から光が曲がって届く。

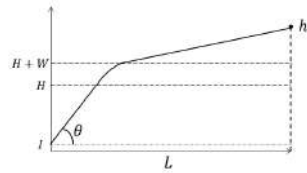


図 6 領域 E の光路

このとき蜃気楼曲線は

$$\theta_j(\theta) = \theta_H \left(1 - \frac{\sqrt{\theta^2 - \theta_W^2}}{\theta} \right) - \frac{W}{L} + \sqrt{\theta^2 - \theta_W^2} + \frac{\theta^2 - \theta \sqrt{\theta^2 - \theta_W^2}}{4\theta_L}$$

($\theta = \theta_W$ のとき $h = H + W$) である。

2.5 領域 D と E との間のギャップ

図 7 に $\theta = \theta_W$ で領域が D から E に切り替わる瞬間を示す。

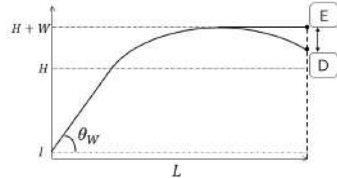


図 7 $\theta = \theta_W$ のときの領域 D と E の光路

領域 D では h は $H + W$ より下にあるが、領域 E ではちょうど $H + W$ にあるので、この間の高さの実景は上位蜃気楼の時は見えないことになる。

3. 上位蜃気楼で像が複数見える条件

以上の検討から $27/16\theta_H \leq \theta_L$ の時には倒立像が見えうことになる。この式は左辺を $2\theta_H$ と考えると

$$H - I \leq \frac{A}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

と変形できて、次のように解釈することができる。

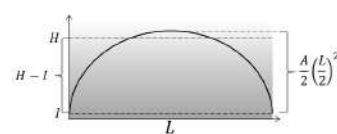


図 8 倒立像ができる条件式の解釈

図 8 のように、すべての高さで屈折率が上に向かっ

て $-A$ で減少しているとする。この状況で水平距離 L 離れた高さ h からの光が曲がって I に届くとき、頂点までの高さが右辺になる。これが左辺より大きいということは、高さ H より高いところを通ってくるくらい大きく曲がって届く必要があるということである。(そのためには A が大きければいいがこれは見る側ではコントロールできない。条件を成立させるためには、遠くを見て距離 L を大きくして右辺の値を大きくするか、あるいは視線高さ I を高くして H に近づけて左辺の値を小さくするということになる。このことは最近の星弘之会員の観測結果(例えば、星 2025)から支持されると考えられる。)

一方、厚み W も像の数を左右する。 W が小さいと θ_W が小さくなるので図 2 の領域 E が(領域 D, B を削って)左に寄ってくる。図 2 のように $2\theta_H \leq \theta_L$ で領域 B が存在する場合で考えると、領域 A の曲がっていない像も含め、ある高さの範囲では像の数は

- $\theta_L < \theta_W$ なら 3 個(倒立像の上に正立像あり)
- $\theta_c < \theta_W \leq \theta_L$ なら 2 個(倒立像の上の正立像なし)
- $\theta_W \leq \theta_c$ なら 1 個(倒立像も見えない)

となる。

4. おわりに

上位蜃気楼の像がいくつ見えるかは屈折を生み出す層の厚みに左右されることがわかった。一方、複数の像が見えうる条件を成立させるためには、なるべく遠くを見たり、視線高さを高くして屈折を生み出す層の高さに近づいたりすればいいこともわかった。

参考文献:

- 松井一幸, 2014: 上位蜃気楼シミュレーション. <https://biwakodas.sakura.ne.jp/mirage/NewSuperiorMirageCalculation.htm>
- 世戸憲治, 吉田文夫, 2019: 微分方程式における興味ある問題(4) —蜃気楼ができる訳—. 数学・物理通信, 9 巻, 4 号.
- 星弘之, 2025: 網走湾で上位蜃気楼の常識をくつがえす(その2). 日本蜃気楼協議会令和 07 年度研究発表会(交流会)